

А.В. Меньшиков

## Исследование контактного взаимодействия берегов трещины в трехмерном пространстве для случая нормального падения волны растяжения-сжатия

Пренебрежение контактным взаимодействием берегов трещины под воздействием нестационарной нагрузки приводит к упрощенному описанию физических процессов и искажению получаемых механических характеристик [1-3]. В данной работе, используя предложенный в [1, 3] подход, рассматривается трехмерная динамическая задача для плоской трещины в пространстве с учетом контактного взаимодействия берегов трещины.

Пусть в трехмерном линейно упругом, однородном и изотропном пространстве имеется плоская стационарная трещина конечных размеров с поверхностью  $\Omega$  и начальным раскрытием  $h_0$ . Введем прямоугольную декартову систему координат, оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  которой лежат в плоскости трещины, а ось  $Ox_3$  перпендикулярна ее плоскости.

Рассмотрим контактное взаимодействие берегов трещины в случае, когда гармоническая во времени волна растяжения-сжатия распространяется перпендикулярно поверхности трещины. Пусть падающая волна описывается потенциальной функцией

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0 e^{i(k_1 x_3 - \omega t)}$$

где  $\omega = 2\pi/T$  - частота,  $T$  - период,  $\Phi_0$  - амплитуда падающей волны,  $i$  - мнимая единица,  $k_1 = \omega/C_1$  - обобщенное волновое число,  $C_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  - скорость распространения продольной волны;  $\lambda$  и  $\mu$  - константы Ламэ;  $\rho$  - плотность материала.

Для нормальных составляющих векторов сил контактного взаимодействия  $q_3(\mathbf{x}, t)$  и разрыва перемещений  $\Delta u_3(\mathbf{x}, t)$ , возникающих в области плотного контакта берегов трещины  $\Omega_l$ , должны выполняться следующие односторонние ограничения в виде неравенств [1, 3]

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) \geq -h_0, \quad q_3(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad (\Delta u_3(\mathbf{x}, t) + h_0)q_3(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Тогда нагрузка на поверхности трещины имеет вид

$$p_3(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} p_3^*(\mathbf{x}, t) + q_3(\mathbf{x}, t), & \forall \mathbf{x} \in \Omega_l, \\ p_3^*(\mathbf{x}, t), & \forall \mathbf{x} \notin \Omega_l, \end{cases}$$

где  $p_3^*(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{-k_1^2 \Phi_0 e^{i(k_1 x_3 - \omega t)}\}$  - нагрузка, являющаяся результатом действия падающей волны.

Так как размеры области  $\Omega_l$  изменяются во времени, то учет контактного взаимодействия берегов делает задачу нелинейной [1, 3]. Поэтому компоненты напряженно-деформированного

состояния, вызванные отраженными волнами, не могут быть представлены в виде гармонических функций.

Представим нормальные составляющие векторов контактных сил взаимодействия и разрыва перемещений рядами Фурье по времени

$$p_3(\mathbf{x}, t) = \frac{p_{3,c}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (p_{3,c}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + p_{3,s}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t)), \quad (2)$$

$$\Delta u_3(\mathbf{x}, t) = \frac{\Delta u_{3,c}^0(\mathbf{x})}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta u_{3,c}^k(\mathbf{x}) \cos(\omega_k t) + \Delta u_{3,s}^k(\mathbf{x}) \sin(\omega_k t)). \quad (3)$$

где

$$p_{3,c}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_3(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, \quad p_{3,s}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T p_3(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt, \quad (4)$$

$$\Delta u_{3,c}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_3(\mathbf{x}, t) \cos(\omega_k t) dt, \quad \Delta u_{3,s}^k(\mathbf{x}) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T \Delta u_3(\mathbf{x}, t) \sin(\omega_k t) dt. \quad (5)$$

Тогда для коэффициентов Фурье получим, согласно [1, 4], систему граничных интегральных уравнений вида

$$\begin{aligned} p_{3,c}^k(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega} F_{33}^{\text{Re}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \Delta u_{3,c}^k(\mathbf{y}) d\Omega - \int_{\Omega} F_{33}^{\text{Im}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \Delta u_{3,s}^k(\mathbf{y}) d\Omega, \\ p_{3,s}^k(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega} F_{33}^{\text{Re}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \Delta u_{3,s}^k(\mathbf{y}) d\Omega + \int_{\Omega} F_{33}^{\text{Im}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) \Delta u_{3,c}^k(\mathbf{y}) d\Omega, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mathbf{x}$  - точка наблюдения;  $\mathbf{y}$  - точка нагружения;  $\omega_k = 2\pi k/T$ ;  $F_{33}^{\text{Re}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$  и  $F_{33}^{\text{Im}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$  представляют собой действительную и мнимую составляющие функции Грина динамической теории упругости  $F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ , для которой в рассматриваемом случае имеем следующее выражение [4]

$$\begin{aligned} F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k) &= \frac{1}{r^3} \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2\pi(\lambda + 2\mu)} - \frac{1}{r^3} \frac{1}{4\pi\mu} \times \\ &\times \left\{ 4\mu^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-l_2)^n}{n!} \frac{(n-1)^2}{(n+2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \lambda^2 n(n+2) + 4\lambda\mu(n+2) + 12\mu^2 \right] \frac{(-l_1)^n}{n!} \frac{C_2^2}{C_1^2} \frac{(n-1)}{(n+2)} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

где  $l_s = i\omega_k r / C_s$ ,  $s = \overline{1, 2}$ ;  $r$  - расстояние между  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ ;  $C_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  - скорость распространения поперечной волны.

Из вида выражения (7) следует, что интегралы, присутствующие в (6), должны рассматриваться в смысле конечной части по Адамару. Выражения для  $F_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega_k)$ , регуляризованные с выделением конечной части расходящихся интегралов, приведены в [4, 5].

Таким образом, задача для отраженных волн сводится к определению контактных сил и раскрытия трещины, удовлетворяющих ограничениям (1). Для решения поставленной задачи

используем итерационный алгоритм решения контактных задач теории упругости с односторонними ограничениями, основанный на вариационных принципах теории упругости [6].

В качестве численного примера рассмотрим задачу о контактном взаимодействии берегов круговой трещины в трехмерном пространстве, поверхность которой описывается координатами  $\Omega = \{x_1^2 + x_2^2 \leq l^2, x_3 = 0\}$ , а начальное раскрытие равно нулю, под действием волны растяжения-сжатия, распространяющейся перпендикулярно плоскости трещины. Материал, в котором находится трещина, имеет следующие механические характеристики: модуль упругости  $E = 200 \text{ ГПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , удельная плотность  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ .

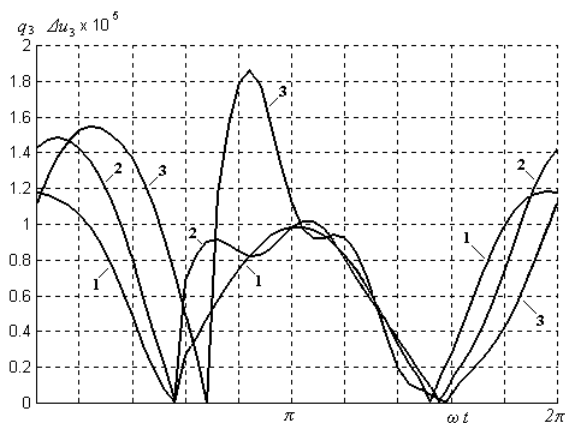


Рис. 1. Контактные силы взаимодействия и разрыв перемещений в точке  $\{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0\}$ : 1 -  $k_1 = 0.18$ , 2 -  $k_1 = 0.45$ , 3 -  $k_1 = 0.72$

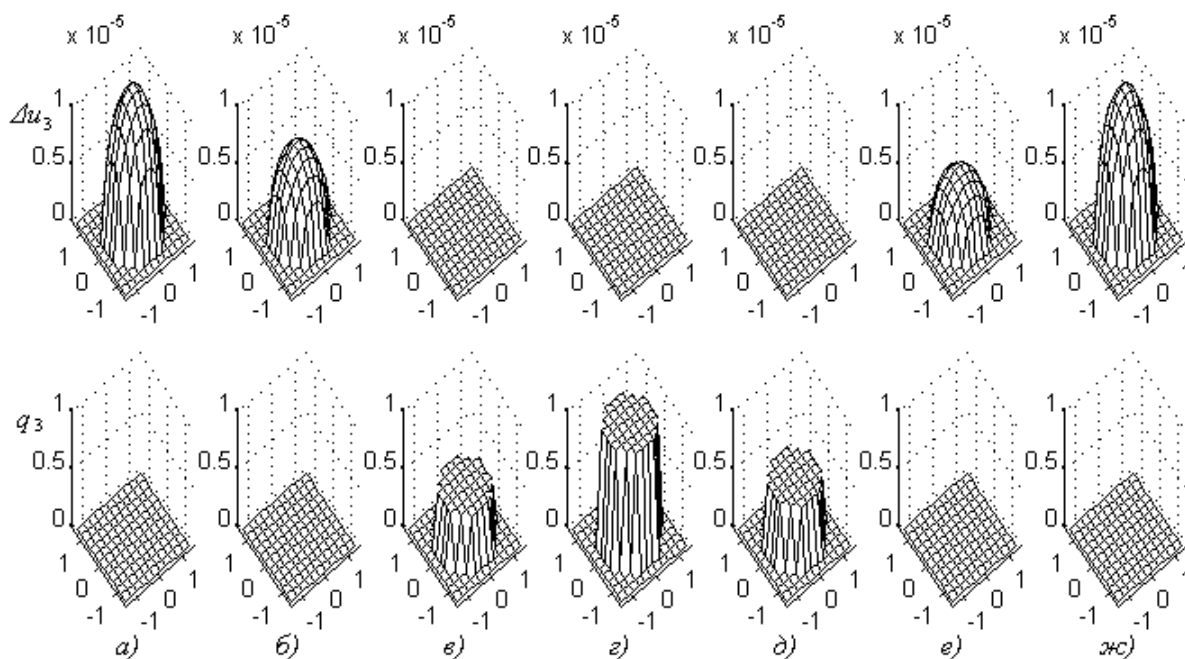


Рис. 2. Контактные силы и разрыв перемещений на поверхности трещины,  $k_1 = 0.18$ , а)  $\omega t = 0$ ; б)  $\omega t = \pi/3$ ; в)  $\omega t = 2\pi/3$ ; г)  $\omega t = \pi$ ; д)  $\omega t = 4\pi/3$ ; е)  $\omega t = 5\pi/3$ ; ж)  $\omega t = 2\pi$ .

О результатах решения задачи можно судить по иллюстрациям, на которых показано распределение во времени векторов контактных сил взаимодействия и разрыва перемещений в точке  $\{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0\}$  (Рис.1) и на поверхности трещины (Рис. 2).

Отметим, что полученное решение удовлетворяет односторонним ограничениям (1) и является устойчивым относительно изменения числа удерживаемых коэффициентов Фурье и точности пространственной и временной аппроксимаций. При малых значениях волнового числа контактные силы распределены по поверхности трещины почти равномерно, а распределение разрыва перемещений имеет форму близкую к эллипсоидальной или равно нулю (Рис.2). С ростом волнового числа структура распределения контактных сил взаимодействия и разрыва перемещений значительно усложняется, гладкость распределения контактных сил нарушается как по поверхности трещины, так и во времени, при этом наблюдается сдвиг по фазе между возбуждающей нагрузкой и раскрытием трещины (Рис.1).

Сравнение полученных для различных типов трещин результатов с данными работ [1, 7], а также их количественный и качественный анализ свидетельствуют о том, что предложенный в данной работе подход может с успехом применяться при решении трехмерных динамических контактных задач для тел с трещинами.

1. Гузь А.Н, Зозуля В.В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках. – Киев, Наукова Думка, 1993.-236с.
2. Guz A.N. Description and study of some nonclassical problems of fracture mechanics and related mechanisms, Int. Appl. Mechanics, 2000, Vol. 36, № 12, pp.1537-1564.1
3. Guz A.N., Zozulya V.V. Fracture dynamics with allowance for a crack edges contact interaction, Int. J. of Nonlin. Sci. and Num. Simulation, 2001, Vol. 2, № 3, pp. 173-233.
4. Зозуля В.В., Меньшиков А.В., Меньшикова М.В. Применение граничных гиперсингулярных интегральных уравнений в механике разрушения, Теоретическая и прикладная механика, 2001, вып. 33, С. 57-63.
5. Меньшиков В.А. Гиперсингулярные интегралы в трехмерных задачах для тел с трещинами // Доповіді НАН України.-1995.-№8.-С. 61-64.
6. Zozulya V.V. Variational principles and algorithms in contact problem with friction, in: Advances in Scientific Computing, Computational Intelligence and Applications, 2001, WSES Press, Danvers, pp. 181-186.
7. Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамика хрупкого разрушения. – М.: Машиностроение, 1988. – 240с.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины  
Украина, 61124, г. Харьков, ул. Матросова 8, кв. 8., Меньшикову Александру Васильевичу  
Тел. (0572) 52-45-77